<u>Definition:</u> Eine Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ heißt <u>konform</u> oder <u>isotherm parametrisiert</u>, falls gilt:

$$|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v ,$$

d.h. falls $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ und $\mathcal{F} = 0$.

<u>Bemerkung:</u> Die Fundamentalmatrix von I ist an jeder Stelle (u,v) ein Vielfaches der Einheitsmatrix. X_u und X_v sind senkrecht zueinander mit ~~Länge 1~~ gleicher Länge! (u,v) heißen isotherme Parameter.

<u>Satz:</u> Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ <u>isotherm parametrisiert</u>. Dann gilt:

$$\Delta X := X_{uu} + X_{vv} = 2 H \, X_u \wedge X_v .$$

Insbesondere hat man:

$$X \text{ Minimalfläche } (H \equiv 0) \iff \Delta X \equiv 0 .$$

Beweis: Aus $X_u \cdot X_u - X_v \cdot X_v = 0$ folgt:

$$0 = (X_u \cdot X_u - X_v \cdot X_v)_u = 2\,(X_{uu} \cdot X_u - X_{uv} \cdot X_v)$$

$$= 2\,\big(X_{uu} \cdot X_u - \underbrace{(X_u \cdot X_v)_v}_{=0} + X_u \cdot X_{vv}\big)$$

$$= 2\,\Delta X \cdot X_u\,,$$

$$0 = (X_v \cdot X_v - X_u \cdot X_u)_v = \ldots = 2\,\Delta X \cdot X_v\,,$$

so dass $\Delta X = \lambda\, X_u \times X_v$ mit $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$.

Es gilt

$$\Delta X \cdot (X_u \times X_v) = (X_{uu} + X_{vv}) \cdot N\, |X_u \times X_v| = (\mathcal{L} + \mathcal{N})\, |X_u \times X_v|\,,$$

so dass $\lambda = (\mathcal{L} + \mathcal{N})\, |X_u \times X_v|^{-1} = \dfrac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{\sqrt{\mathcal{E}}\sqrt{\mathcal{G}}}$.

Hier ist nun $H = \dfrac{\mathcal{L}\mathcal{G} + \mathcal{N}\mathcal{E} - 2\mathcal{M}\mathcal{F}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)} \underset{(\mathcal{E}=\mathcal{G},\, \mathcal{F}=0)}{=}$

$\dfrac{\mathcal{E}(\mathcal{L} + \mathcal{N})}{2\,\mathcal{E}^2} = \dfrac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{2\,\mathcal{E}}$, also $\lambda = 2H$.

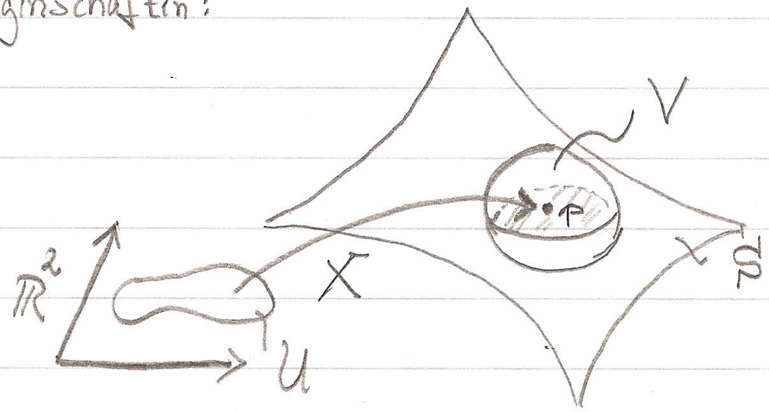
$\square$

Kapitel III Die innere Geometrie von Flächen

§1 Einführung

Bisher haben wir Flächen in $\mathbb{R}^3$ betrachtet, die durch eine Parametrisierung $\Omega \to \mathbb{R}^3$ gegeben sind und alle geometrischen Begriffe über diese Parametrisierung definiert. Ab jetzt werden wir unter eine Fläche eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ verstehen, die man zumindest lokal parametrisieren kann, und wir wollen uns mit der inneren Geometrie solcher Flächen beschäftigen. Das sind Eigenschaften, die unabhängig sind von einer speziell gewählten lokalen Parameterdarstellung.

Definition 1: Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt eine regulare (eingebettete) Fläche, wenn für alle Punkte $p \in S$ gilt: Zu p gibt es eine Umgebung V in $\mathbb{R}^3$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine <u>Bijektion</u> $X : U \to S \cap V$ mit den folgenden Eigenschaften:



i) X ist glatt $(= C^\infty)$ als Abbildung $U \to \mathbb{R}^3$.

ii) X_u und X_v sind für alle $(u,v) \in U$ linear unabhängig.

iii) $X^{-1} : V \cap S \to U$ ist stetig $\big(\Leftrightarrow \exists\, W \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F : W \to \mathbb{R}^2$ stetig, so dass $V \cap S \subset W$ und $F|_{V\cap S} = X^{-1} \big)$

<u>Bemerkungen:</u> 1.) Die Bezeichnung "eingebettet" bezieht sich darauf, dass S ("die Fläche") direkt als Teilmenge des umgebenden Raumes $\mathbb{R}^3$ definiert wird. Es gibt eine abstraktere Definition für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten ohne Bezugnahme

auf einen umgebenden Euklidischen Raum.

2.) <u>Tangentialebene</u>: Sei $p \in S$ und X eine <u>lokale Parametrisierung</u> von S bei p wie in Definition 1.

$$\boxed{T_p S := \text{Tangentialebene von } S \text{ in } p := DX|_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2).}$$

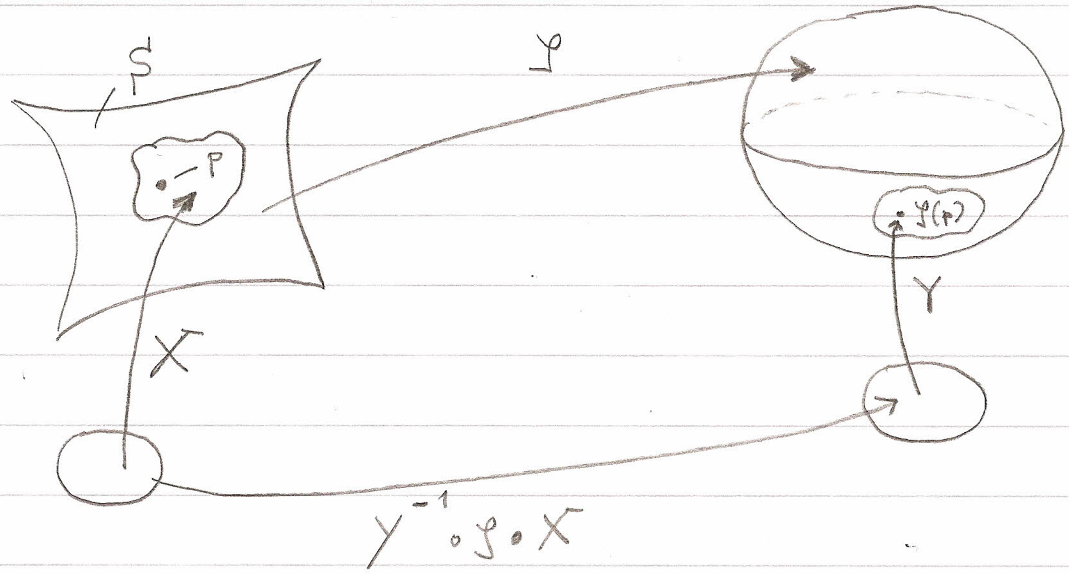
Die Definition hängt scheinbar von der Wahl der lokalen Parametrisierung von S bei p ab, wie früher gilt jedoch:

$$\boxed{\begin{array}{c} T_p S = \{\alpha'(0) : \alpha : I \to \mathbb{R}^3, \; I \text{ Intervall um } 0, \\ \alpha(0) = p, \; \alpha(I) \subset S\}, \end{array}}$$

und die Menge rechts ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung von S bei p.

$\square$

Seien S, S' zwei reguläre Flächen, $f : S \to S'$.



<u>Definition 2</u>: a) $\varphi : S \to S'$ heißt <u>differenzierbar (glatt)</u>, falls es zu jedem $p \in S$ eine Parametrisierung X von S bei p und eine Parametrisierung Y von S' nahe $\varphi(p)$ gibt, so dass $Y^{-1} \circ \varphi \circ X$ im üblichen Sinn glatt ist.

b) Ein <u>Diffeomorphismus</u> $\varphi : S \to S'$ ist eine glatte <u>Bijektion</u>, deren Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : S' \to S$ ebenfalls glatt ist.

c) Ein Diffeomorphismus $\varphi : S \to S'$ heißt eine

<u>Isometrie</u>, wenn für alle $p \in S$, $w, \tilde{w} \in T_p S$

gilt: $\boxed{d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(\tilde{w}) = w \cdot \tilde{w}}$

<u>Man nennt ~~nennt~~ S und S' dann zueinander isometrisch.</u>

<u>Bemerkungen:</u> 1.) In c) bedeutet

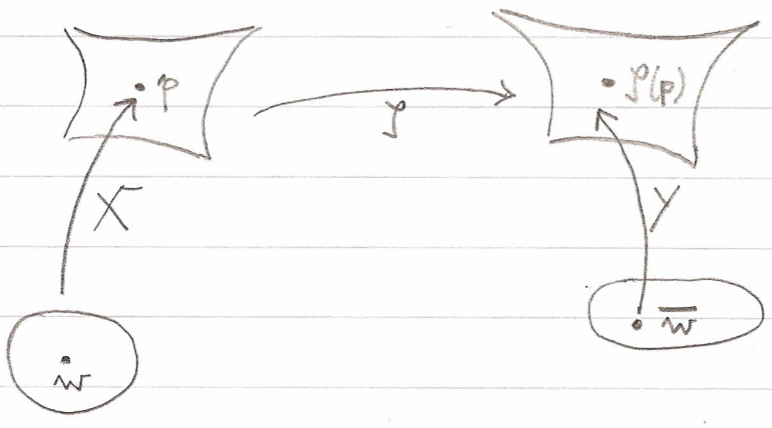
$$d\varphi_p : T_p S \longrightarrow T_{\varphi(p)} S'$$

das <u>Differential von φ</u> in p, das bei einer Isometrie per Definition "das Skalarprodukt erhält". Wie erklärt man in vernünftiger Weise das Differential $d\varphi_p$ als lineare Abbildung $T_p S \longrightarrow T_{\varphi(p)} S'$?

Sei $w \in T_p(S)$. Wähle eine Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ mit $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Dann ist $\tilde{\alpha} := \varphi \circ \alpha$ Kurve in S' mit $\tilde{\alpha}(0) = \varphi(p)$. Man setzt:

$$d\varphi_p(w) := \tilde{\alpha}'(0).$$

Die folgende formale Definition von $d\varphi_p$ leistet dasselbe:



Das Differential $D(Y^{-1} \circ \varphi \circ X)|_w$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $w := X^{-1}(p)$, und man bekommt daraus die gewünschte lineare Abbildung $T_p S \to T_{\varphi(p)} S'$ durch Bildung von $(\bar{w} := Y^{-1}(\varphi(p))$

$$DY|_{\bar{w}} \circ D(Y^{-1} \circ \varphi \circ X)|_w \circ (DX|_w)^{-1}$$

2.) Ist S eine Fläche und $p \in S$, so ist per früherer Definition die Erste Fundamentalform I_p die Einschränkung von „$\circ$" auf $T_p S$. $\varphi : S \to S'$ ist also genau dann eine Isometrie, wenn gilt:

$$\forall w, \tilde{w} \in T_p S: \; I^{S'}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(w), d_p\varphi(\tilde{w})) = I^{S}_p(w, \tilde{w})$$

Ein Diffeomorphismus φ ist also genau dann eine Isometrie $S \to S'$, wenn das Differential $d\varphi_p$ überall die Erste Fundamentalform erhält.

3.) Man nennt eine glatte Abbildung $\varphi : S \to S'$ eine <u>lokale Isometrie</u>, wenn jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung U in $\mathbb{R}^3$ hat, so dass $\varphi|_{U \cap S}$ eine Isometrie $U \cap S \longrightarrow \varphi(U \cap S) \subset S'$ ist.

<u>Beispiel:</u> Sei $S := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Z ist also der Zylinder über der Einheitskreislinie. Man setzt $\varphi : S \longrightarrow Z$, $\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$. Offensichtlich ist φ glatt, aber natürlich <u>nicht</u> global injektiv, allerdings handelt es sich um eine lokale Isometrie. Es gilt nämlich:

$$d\varphi|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, und man hat für $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \; (= T_{(u,v)} S)$:

$$d\varphi|_{(u,v)}(w) \cdot d\varphi|_{(u,v)}(w) = \left\| \begin{pmatrix} -w_1 \cdot \sin u \\ w_1 \cdot \cos u \\ w_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = |w|^2$$

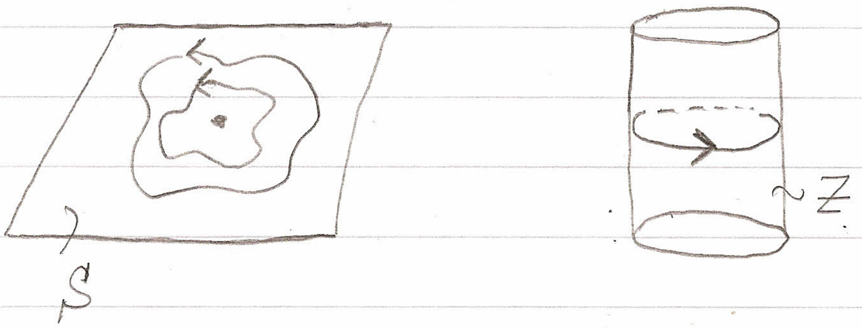
Folglich gilt

$$d\varphi|_{(u,v)}(w) \cdot d\varphi|_{(u,v)}(\tilde{w}) = w \cdot \tilde{w} \qquad (*)$$

zumindest für $w = \tilde{w} \in T_{(u,v)} S$, aber das ist gleichwertig mit $(*)$ für alle $w, \tilde{w} \in T_{(u,v)} S$. Umgekehrt ist Z auch lokal isometrisch zur Ebene: Man rollt Z auf der Ebene ab.

$\square$

Aus topologischen Gründen sind S und Z nicht isometrisch zueinander. In der Ebene S kann offenbar jede geschlossene Kurve stetig über eine Schar geschlossener Kurven in einen Punkt deformiert werden ("die Ebene ist einfach zusammenhängend), für geschlossene Kurven in Z ist dies i.a. nur dann möglich, wenn man dabei Z verlässt. Mithin kann es nicht einmal einen Homeomorphismus $S \to Z$ geben.



Sind bei lokaler Parametrisierung über derselben Grundmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ die Koeffizienten von I für zwei Flächen gleich, so sind diese lokal isometrisch, genauer:

<u>Satz 1:</u> Seien S_1, S_2 zwei reguläre Flächen. Angenommen, $X_1 : U \to S_1$, $X_2 : U \to S_2$ sind lokale Parametrisierungen über derselben Grundmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$E_1 = E_2, \; F_1 = F_2, \; G_1 = G_2 \text{ auf } U.$$

Dann ist $\varphi := X_2 \circ X_1^{-1} : X_1(U) \to S_2$ eine lokale